درس النـهايات -الجزء 1-

Latreche MIFA

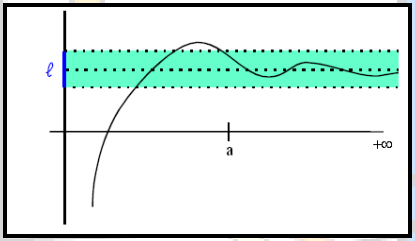
1) نهاية منتهية لدالة عند ∞:

1.1 نهاية منتهية لدالة عند +∞:

القاعدة:

لتكن f دالة معرفة على مجال يشمل المجال المفتوح $]a;+\infty[$ و ℓ عدد حقيقي.

❖ إذا كان كل مجال مفتوح يشمل ℓ، يشمل في نفس الوقت $f(x)$ من أجل x كبير بقدر كاف، نقول عن الدالة f أنها تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى $+\infty$، ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

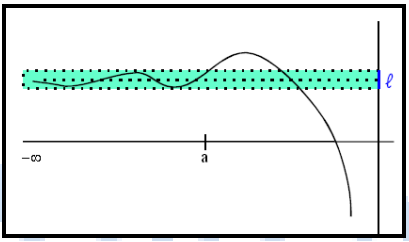


1.2 نهاية منتهية لدالة عند -∞:

القاعدة:

لتكن f دالة معرفة على مجال يشمل المجال المفتوح $]-\infty;a[$ و ℓ عدد حقيقي.

❖ إذا كان كل مجال مفتوح يشمل ℓ، يشمل في نفس الوقت $f(x)$ من أجل x صغير بقدر كاف، نقول عن الدالة f أنها تؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$، ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.

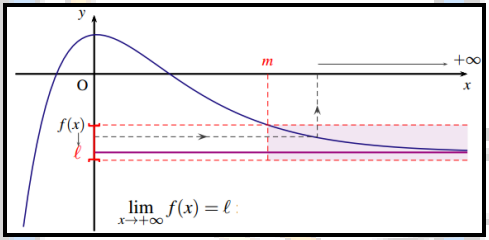


1.3 المستقيم المقارب الأفقي:

القاعدة 1:

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=\ell$.

❖ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ، نقول عندئذ أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$. (أنظر الشكل الموالي).



مثال 1:

❖ لتكن $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+4}{-x^2-5x+1}$. بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y=-2$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$.

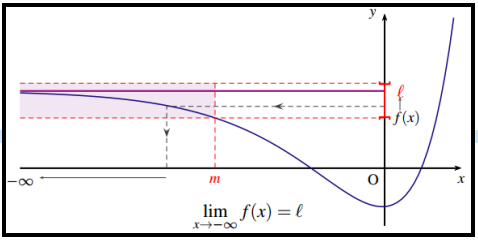
❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{-x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{-x^2}=-2$.

ومنه فإن المستقيم الذي معادلته $y=-2$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$.

القاعدة 2:

❖ إذا كانت $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ نقول عندئذ أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$. (أنظر الشكل الموالي).

Latreche MiFA



مثال 2:

❖ لتكن $g(x)=\dfrac{-3x+5}{x+1}$. بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y=-3$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_g) عند $-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+5}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{x}=-3$.

ومنه فإن المستقيم الذي معادلته $y=-3$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_g) عند $-\infty$.

نتيجة:

❖ لدراسة وضعية (C_f) المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته: $y=\ell$، ندرس إشارة الفرق: $[f(x)-\ell]$:

- $[f(x)-\ell]<0$ معناه أن (C_f) يقع تحت (d).
- $[f(x)-\ell]>0$ معناه أن (C_f) يقع فوق (d).

مثال:

لتكن $f(x)=\dfrac{-4x^2-12x-7}{4x^2+8x+5}$، وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها.

❖ بيّن أن المستقيم (d) الذي معادلته $y=-1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

❖ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) عند $+\infty$ و $-\infty$.

Latreche MIFA

الحل:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x^2-12x-7}{4x^2+8x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x^2}{4x^2} = -1$.

ومنه فإن المستقيم (d) الذي معادلته $y=-1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^2-12x-7}{4x^2+8x+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^2}{4x^2} = -1$.

ومنه فإن المستقيم (d) الذي معادلته $y=-1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $-\infty$.

لدراسة وضعية (C_f) المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته: $y=-1$، نحسب أولا الفرق: $[f(x)-(-1)]$:

❖ $f(x)-(-1) = \dfrac{-4x^2-12x-7}{4x^2+8x+5}+1$

$= \dfrac{-4x^2-12x-7+4x^2+8x+5}{4x^2+8x+5}$

$= \dfrac{-4x-2}{4x^2+8x+5}$

ندرس الآن إشارة الفرق: $[f(x)-(-1)]$:

❖ إشارة $4x^2+8x+5$:

$\Delta = 64-80 = -16 < 0$.

بما أن معامل x^2 موجب، فإنه من أجل كل عدد حقيقي x، $4x^2+8x+5>0$.

❖ إشارة $-4x-2$:

$-4x-2 \le 0 \Leftrightarrow -4x \le 2 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{2}$

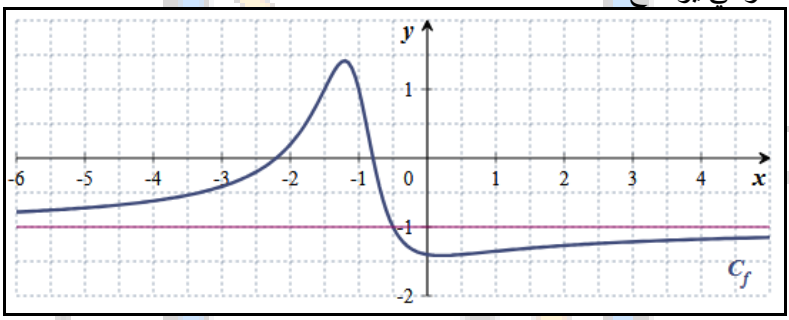
❖ ومنه فإن إشارة الفرق: $[f(x)-(-1)]$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)-(-1)$		$+$	0	$-$	

نستنتج أنه:

- من أجل $x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[$، فإن $\left(C_f\right)$ يقع فوق المستقيم (d).
- $\left(C_f\right)$ يقطع المستقيم (d) في النقطة التي إحداثياتها $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -1\right)$.
- من أجل $x \in \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$، فإن $\left(C_f\right)$ يقع تحت المستقيم (d).

الشكل الموالي يوضح لنا ذلك:



Latreche MIFA