

تمارين حول النهايات

التمرين 1:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$.

- (1) أعط القيم التقريبية إلى 10^{-3} لـ: $f(1)$; $f(10)$; $f(100)$; $f(3234)$.
- (2) باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر، مثل الدالة f . ما الذي يمكن قوله عن نهاية f عند $+\infty$.
- (3) ليكن المجال المفتوح الذي مركزه 2 وشعاعه 0,01، أي المجال المفتوح $]1,99; 2,01[$. برهن أنه من أجل $x > 10$ ، $f(x) \in]1,99; 2,01[$. (يمكننا كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$).
- (4) ليكن المجال المفتوح $]2-r; 2+r[$ مع $r > 0$. برهن أنه من أجل x أكبر من العدد x_0 يطلب تعيينه بدلالة r ، كل قيم $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2-r; 2+r[$.
- (5) برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

التمرين 2:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال \mathbb{R} بـ: $f(x) = 3x^3 + x^2$.

- (1) أحسب: $f(1)$; $f(10)$; $f(100)$; $f(5812)$.
- (2) باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر، مثل الدالة f . ما الذي يمكن قوله عن نهاية f عند $+\infty$.
- (3) ليكن المجال المفتوح $]100; +\infty[$. برهن أنه من أجل $x > 10$ ، $f(x) \in]100; +\infty[$.
- (4) ليكن المجال المفتوح $]A; +\infty[$ مع $A > 0$. برهن أنه من أجل x أكبر من \sqrt{A} ، كل قيم $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]A; +\infty[$.

التمرين 3:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال \mathbb{R} بـ: $f(x) = -2x + 3$. برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

التمرين 4:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = 2 + \frac{3}{(x-1)^2}$.

- (1) أثبت أن مجموعة تعريف الدالة f هي المجال: $]1; +\infty[\cup]-\infty; 1[$.
- (2) باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر، مثل الدالة f . ما الذي يمكن قوله عن نهاية f عند 1.
- (3) ليكن المجال المفتوح $]1000; +\infty[$. ما هو الشرط الذي يجب توفره في x لكي تكون كل قيم $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]1000; +\infty[$.
- (4) ليكن المجال المفتوح $]A; +\infty[$ مع $A > 2$. ما هو الشرط الذي يجب توفره في x لكي تكون كل قيم $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]A; +\infty[$. ثم أثبت أن: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

التمرين 5:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = 1 + x + \sin x$. برهن باستعمال طريقة النهايات والترتيب أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التمرين 6:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$.

(1) باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر، مثل الدالة f . ما الذي يمكن قوله عن نهاية f عند 0 . برهن صحة النتيجة المتحصل عليها.

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + 5 + \cos \frac{1}{x}$.

(2) برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

(3) تأكد من النتيجة المتحصل عليها عن طريق تمثيل الدالة g باستعمال آلة حاسبة بيانية أو جهاز كمبيوتر.

التمرين 7:

باستعمال العمليات على النهايات أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1), \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + x$$

التمرين 8:

باستعمال العمليات على النهايات أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{x^2-1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}{x + \sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+5}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{x + \sqrt{x}}$$

التمرين 9:

(1) أحسب نهاية كل دالة من الدوال التالية عند 0 :

$$f(x) = x^3 + 5, \quad f(x) = x^3 + x + 1, \quad f(x) = \sqrt{x} + 2, \quad f(x) = x^3 - 3 + \frac{1}{x}$$

(2) أحسب نهاية كل دالة من الدوال التالية عند $+\infty$:

$$f(x) = x^3 + 5, \quad f(x) = x^3 + x + 1, \quad f(x) = \sqrt{x} + 2, \quad f(x) = x^3 - 3 + \frac{1}{x}$$

التمرين 10:

أحسب:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} + x - 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{1}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)(x^2-5), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 + \frac{1}{x}\right)(2x-3) \end{aligned}$$

التمرين 11:

$$\begin{aligned} (1) \text{ أحسب: } & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x - 2 \text{ ثم استنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right) \\ (2) \text{ باستعمال طريقة مشابهة للطريقة السابقة، أحسب: } & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \end{aligned}$$

التمرين 12:

- (1) تأكد أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2$ تؤول إلى حالة عدم تعيين. بعد استخراج x^3 كعامل مشترك من العبارة $x^3 - x^2$ ، استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2$.
- (2) تأكد أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين. بعد استخراج x^3 كعامل مشترك من العبارة $x^3 + x$ و استخراج x^2 كعامل مشترك من العبارة $x^2 + x$ ، استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + x}$.
- (3) تأكد أن: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين. بعد تحليل بسط ومقام العبارة $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ إلى جداء، استنتج $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$.
- (4) تأكد أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ تؤول إلى حالة عدم تعيين. بعد ضرب بسط ومقام العبارة $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ بمرافق البسط، استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$.

التمرين 13:

أحسب:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x^2 + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2x - 3} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 + \frac{1}{x}}{x^3 + 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} \end{aligned}$$

التمرين 14:

أحسب نهاية الدالة f عند 0 في كل حالة من الحالات التالية:

$$\begin{aligned} & f(x) = \frac{1}{x+1} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^5} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad , \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2} \\ & f(x) = \frac{1}{x-1} - 1 \quad , \quad f(x) = x + \frac{1}{x^2} \quad , \quad f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad , \quad f(x) = \frac{1-x}{x^2} \end{aligned}$$

التمرين 15:

أحسب:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + x \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$$

التمرين 16:

أحسب النهايات التالية:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2+1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x+1)^2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \\ & \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x-1}{2x+1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x-1}{(2x-1)^2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x-3} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x+3} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x-1}{2x-1} \end{aligned}$$

التمرين 17:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2-x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-5}{x^2+x-2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5}{x^2+x-2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-5}{x^2+x-2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2+x-2}$$

التمرين 18:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2+3x^2}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3+x^2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$$

التمرين 19:

إليك جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$

أوجد، باستعمال هذا الجدول، النهايات التالية:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x}) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right) \\ & \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{f(x)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+3} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)+3} \end{aligned}$$

التمرين 20:

لتكن الدالة f حيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم لدينا: $f(x) \geq x^2 + x + \frac{1}{x}$.

(1) استنتج، إن كان ذلك ممكناً، النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

لتكن الدالة g حيث من أجل كل $x \in]100; +\infty[$ لدينا: $\frac{3-x}{5-2x} \leq g(x) \leq \frac{x^2+x-3}{2x^2-5}$.

(2) استنتج، إن كان ذلك ممكناً، النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) , \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

التمرين 21:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{3x+5}{x-4}$.

(1) ما هي مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(3) استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f .

(4) تأكد من صحة النتائج المتحصل عليها من خلال رسم (C_f) على حاسبة بيانية أو كمبيوتر.

التمرين 22:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$.

(1) ما هي مجموعة تعريف الدالة f . أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 2$ ، لدينا: $f(x) = x + \frac{1}{x-2}$.

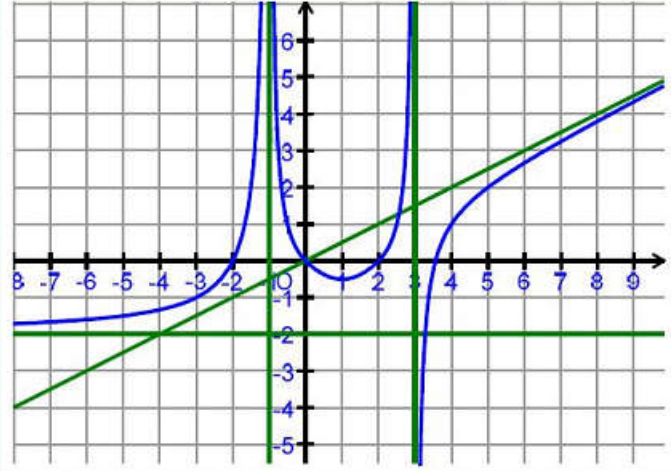
(3) استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f .

(4) أثبت أنه من أجل كل $x > 2$ لدينا $f(x) - x > 0$ ، وأنه من أجل كل $x < 2$ لدينا $f(x) - x < 0$. ما

هو التفسير الهندسي لهذه المتراجحات.

(5) تأكد من صحة النتائج المتحصل عليها من خلال رسم (C_f) على حاسبة بيانية أو كمبيوتر.

الشكل التالي هو التمثيل البياني لدالة f (باللون الأزرق):



- (1) باسـتعمال هذا الشكل، أوجد نهايات f عندما تؤول x إلى:
- $-\infty ; -2 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3 ; 4 ; +\infty$
- (2) استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f .

تم بحمد الله وتوفيقه

